

第 39 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

2022 年 10 月 29 日上午 9:00-12:00

一、(40 分) 如图 1a, 一段抛物线形状的刚性金属丝固定在竖直平面内, 抛物线方程为 $y = ax^2$ (y 轴竖直向上, a 为待定常量); 一长度为 $2l$ 的匀质刚性细杆的两端 A、B 各有一个小圆孔, 两圆孔都套在金属丝上。圆孔和金属丝之间非常光滑, 摩擦力非常小, 在问题 (1)、(2) 和 (3) 中可忽略。若给细杆一个冲量, 使其运动; 经过足够长的时间, 细杆静止于平衡位置, 此时细杆和水平方向之间的夹角 $\theta = 30^\circ$ 。已知重力加速度大小为 g 。

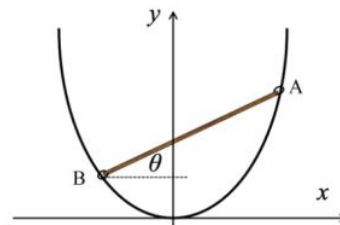


图 1a

- (1) 求待定常量 a ;
- (2) 若杆在上述平衡位置附近小幅振动, 求振动的频率;
- (3) 细杆静止在上述平衡位置。现有一只小白鼠, 从静止开始由杆底端沿杆往上爬。在爬杆的过程中, 细杆始终保持静止; 假设小白鼠可视为质点, 且小白鼠在杆端不接触金属丝。求小白鼠在时刻 t (以小白鼠开始爬杆的时刻为时刻零点) 沿细杆的位移 $s(t)$, 小白鼠是否可以爬到细杆顶端? 如果可以, 小白鼠爬到细杆顶端, 最少用时多少?

二、(60 分) 动能为 K_1 的粒子 1 (入射粒子) 从无穷远处入射, 与静止的粒子 2 (靶粒子) 发生弹性碰撞, 碰撞后粒子 1 的动能和运动方向都发生了变化。不考虑重力。

- (1) 散射后 (无穷远处) 粒子 1 的动能为 K_1' , $k = \frac{K_1'}{K_1}$ 称为运动学因子。试给出 k 的取值范围。

(2) 本问采用牛顿力学理论。

(i) 将散射后粒子 1 的运动方向 (散射方向) 与入射方向之间的夹角 (散射角) 记为 θ 。将粒子 2 与粒子 1 的质量之比记为 R 。对于任意给定的 R , k 是 θ 的函数。分别在 $R > 1$ 、 $R = 1$ 和 $R < 1$ 三种情形下, 导出 k 对 θ 的依赖关系 $k(\theta)$, 并给出 θ 的取值范围。

(ii) 在某些 R 取值范围中, k 可能是 θ 的多值函数 (每种函数形式称为 k 函数的一个分支)。要确定 k 的值, 需要补充描述两粒子相互作用部分细节的参量。采用最简单的硬球模型, 即把发生碰撞的两个粒子都视为表面光滑的匀质刚球, 它们只在碰撞时有相互作用。设两粒子半径之和为 A , 靶粒子 2 的质心到入射粒子 1 中心的速度所在直线的距离为 b (瞄准距离), 如图 2a 所示。试求 k (用 R 、 A 和 b 表出), 并用“擦边而过”和“对心碰撞”这两种特殊情形来验证可由 b 的取值判断同一个 θ 下 $k(\theta)$ 所在的分支。求出 $k(\theta)$ 各分支所对应的 b 的取值范围。

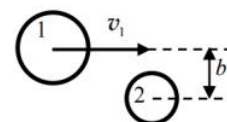


图 2a. 瞄准距离 b 的几何示意图

(3) 设两粒子 (可视为质点) 的静止质量均为 m_0 。粒子 1 的入射速度很快, 以至于需要考虑相对论效应。真空中的光速为 c 。

(i) 求散射角为 θ 时的运动学因子 $k(\theta)$, 并与牛顿力学的结果进行比较。

(ii) 求碰后粒子 1、2 速度之间的夹角 α 与 K_1' 的关系, α 在何种情况下取极值? 并判断极值的性质 (极大或极小), 给出该极值以及相应的 θ 值。

(注: 解题涉及到需要进行区分的物理量时, 用脚标 1 和 2 区分粒子, 用不加 “'”、加 “'” 分别表示碰撞前、后的物理量。最终表达式中涉及到的三角函数一律采用余弦函数, 且不含半角、倍角表示。)

三、(60 分) 一匀质刚性细圆环半径为 R , 质量为 M , 在水平地面 (x - y 坐标平面) 上滚动。假定摩擦系数足够大, 以至于圆环和地面之间始终无滑动。记 t 时刻圆环所在平面与竖直方向 (z 方向) 之间的夹角为 $\theta(t)$, 圆环所在平

面与地面之间的交线相对于 x 方向的夹角为 $\phi(t)$ ，圆环与地面的瞬时接触点的直角坐标为 $(x(t), y(t), 0)$ ，如图 3a 所示。重力加速度大小为 g 。

(1) 描述任意 t 时刻圆环空间位置的 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$ 并非完全相互独立，试求出它们及其对时间的一阶导数之间的所有约束条件。

(2) 设圆环做“匀速圆周运动”，圆环与地面的接触点以恒定速率绕 z 轴画出一个半径为 r 的圆， $\theta(t) = \theta$ (θ 为常量)， $\phi(t)$ 是时间 t 的线性函数。在实验室参考系 Σ 中，不失一般性可设

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

这里 ω 是待求的角速度。在绕 z 轴以角速度 ω 匀速旋转的转动参考系 Σ' 中， θ 和 ϕ 均为常量，圆环绕垂直于环面的中轴线做定轴转动。在参考系 Σ' 中，圆环上各质元会“感受”到离心力和科里奥力的作用。将圆环视为许多微元的集合，求所有微元所受到的离心力的合力 $F_{\text{离心}}$ 、科里奥力的合力 $F_{\text{科氏}}$ 以及相对于圆环质心的离心力的合力矩 $\tau_{\text{离心}}$ 、科里奥力的合力矩 $\tau_{\text{科氏}}$ (结果可包含尚未求出的 ω)。

(3) 求 (2) 中的 ω 以及地面对圆环施加的作用力 (结果不得包含 ω)。

(4) 圆环高速滚动时，圆环可在竖直平面附近摆动而不会倒下，具有较好的稳定性，从而圆环质心可近似视为沿直线运动，设该直线沿 x 轴方向，质心速度大小约为常量 V ，即质心位置坐标 $x(t) = Vt + \delta x(t)$ ，而 $\delta x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\phi(t)$ 均为小量 (注意，它们可能并非是同阶小量)。导出保留到最低阶小量的圆环的运动方程。假设最低阶小量按余弦函数随时间变化，求变化的角频率 Ω ；并确定保持圆环运动稳定所需的常量 V 的最小值 V_{min} 。

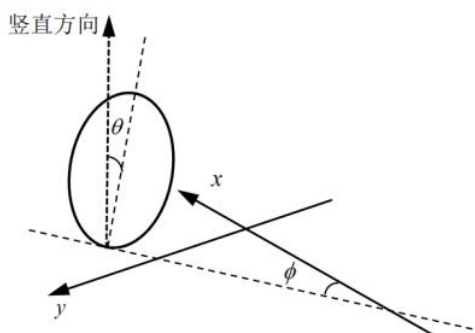


图 3a

四、(60 分) 自由电子激光器是以自由电子束为工作物质，将相对论性电子束的动能转变成相干辐射能的装置，它在科研、生产等领域中都具有重大应用前景。如图 4a，自由电子激光器的基本结构有三个部分：电子束加速器、扭

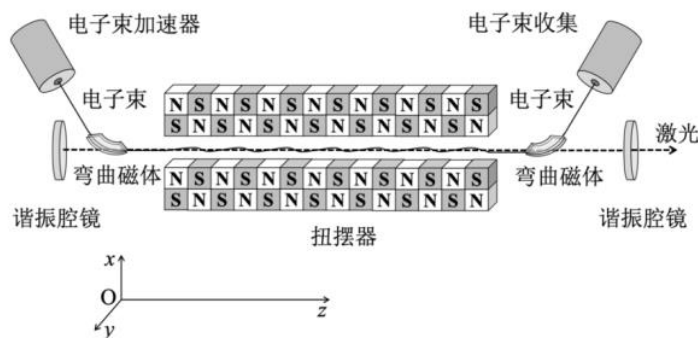


图 4a

摆器和光学谐振腔；其中扭摆器是自由电子激光器的核心部分，它由沿 z 方向按空间周期 A 排列的永磁体组成，产生周期性横向静磁场，磁感应强度方向沿 x 轴，大小为

$$B = B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{A}z\right)$$

电子束经过加速器加速到预定的速率 v_0 ，由弯曲磁体引导，沿 z 轴正方向注入扭摆器，高速运动的电子在扭摆器中受到交变磁场的作用做扭摆运动，同时辐射相干电磁波。设 B_0 不太强，磁场对电子运动速度的改变量的大小远小于 v_0 ，且电子束相干辐射电磁波对电子动能的损耗可忽略不计。电子的静止质量为 m_e ，电子所带电量为 $-e$ 。不计重力。

(1) 建立参考系 $S'(x', y', z')$ ，使 S' 相对于实验室参考系 $S(x, y, z)$ 沿 z 轴正方向以大小为 v_0 的速度做匀速直线运动， x' 轴和 x 轴、 y' 轴和 y 轴两两相互平行， z' 轴和 z 轴重合。利用前述近似条件，在参考系 S' 中求出电子在 t' 时刻的位置坐标 (x', y', z') ，并画出电子运动轨迹示意图。

(2) 如果扭摆器磁场的空间变化周期 $\Lambda = 1 \text{ mm}$ (可视为准确值), 沿 z 轴正方向辐射 X 激光的波长为 4.00 \AA , 求电子束加速器的加速电压。已知电子静止质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 单位电荷量 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

(3) 用波长为 4.00 \AA 的激光作为入射光 (可视为平面波), 如图 4b 所示。在 $x-z$ 平面内有等边菱形组成的共面二维晶体, 菱形的边长 $d = 8.00 \text{ \AA}$, 两顶角各为 60° 、 120° , 设二维晶体对入射波的散射较弱, 可忽略散射波再次被散射的影响, 试问在 $x-z$ 平面内远处可以观察到多少衍射主级峰? 并求相应主级峰的方位 (用图 4b 中的 θ 表示)。

已知: 在两惯性参考系 $S'(x', y', z')$ 、 $S(x, y, z)$ 中电磁场的变换关系为

$$\begin{cases} E_{x'} = \frac{E_x - v_0 B_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{y'} = \frac{E_y + v_0 B_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ E_{z'} = E_z. \end{cases} \quad \begin{cases} B_{x'} = \frac{B_x + \frac{v_0}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{y'} = \frac{B_y - \frac{v_0}{c^2} E_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\ B_{z'} = B_z. \end{cases}$$

式中 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 是真空中光速。

五、(50 分) 光在单轴晶体内传播呈现各向异性, 按照偏振状态, 可分为 o 光 (寻常光) 和 e 光 (非常光)。单轴晶体内有一特定取向, 光沿此方向传播时 o 光和 e 光的传播速度相同, 传播方向不发生分离, 该方向称为晶体光轴。 o 光在晶体内感受到的折射率各向同性, 为 n_o , 波速各向同性为 $v_o = c/n_o$ (c 为真空中的光速); e 光在垂直于光轴的方向传播感受到的折射率为 n_e , 波速为 $v_e = c/n_e$ 。当 e 光的传播方向介于平行于和垂直于光轴之间时, 其感受到的折射率随其与光轴的夹角单调变化。对于晶体内点源或惠更斯原理中的次波源, 其发出的光的波前是以光轴为对称轴的旋转椭球面。如图 5a, 建立 y 轴与光轴取向重合的直角坐标系, 以下对 o 光和 e 光传播过程的分析仅限于在 $y-x$ 截面内的情形。

(1) 根据惠更斯原理作图。

在图 5a 中, 真空波长为 λ 的平面光波从空气正入射到晶体表面, 晶体表面法线方向与光轴的夹角为 θ 。画出在晶体内传播的 o 光与 e 光的波前。标出分别与 o 光、 e 光对应的波矢 k_o 、 k_e 的方向 (次波等相位面的包络面的法线方向, 即等相位面的传播方向), 以及由惠更斯原理确定的对应光线的传播方向 N_o 、 N_e 。取 $n_o > n_e$, 将 o 光和 e 光的传播情况示于同一图中。

(2) 记 e 光的光线传播方向 N_e 与光轴之间的夹角为 ξ , 导出 ξ 和 θ 两个角度的正切之间的关系。

(3) 一种名为 BBO 的单轴晶体的折射率色散曲线方程为 (λ 为真空波长, 以 μm 为单位):

$$\begin{cases} n_o^2(\lambda) = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \\ n_e^2(\lambda) = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2 \end{cases}$$

分别求真空波长为 800.0 nm 和 400.0 nm 时, BBO 单轴晶体中的 n_o 和 n_e 。

(4) 光学晶体的重要作用之一是实现频率转换, 例如光学倍频过程, 它是指两个同频率的基频光子转换为一个频率加倍的倍频光子, 这个过程须满足能量守恒和动量守恒。在晶体中, 波矢为 k 的光子的动量也可表示为 $p = \hbar k$,

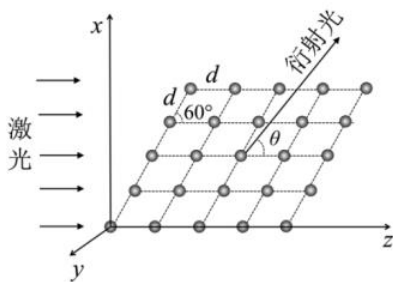


图 4b

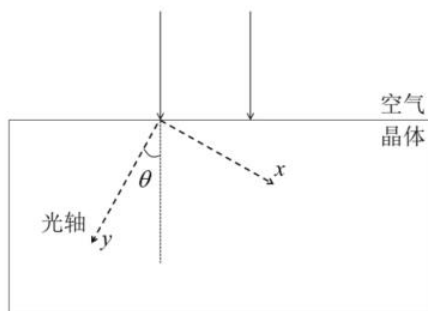


图 5a

其中 h 为约化普朗克常量。

(4.1) 试表出倍频过程中基频光子波矢 k_1 与倍频光子波矢 k_2 之间的关系。

(4.2) 利用 BBO 晶体, 将真空波长为 800.0 nm 的光波倍频为真空波长为 400.0 nm 的光波, 基频光和倍频光可各自选为 o 光或 e 光, 试给出实现此倍频过程的选择方案。

(5) 按照图 5a 的方式设置 BBO 晶体, 使晶体表面法线与光轴夹角为 θ , 让真空波长为 800.0 nm 的基频光以平面波形式垂直入射到此晶体, 角度 θ 取值多大可以满足动量守恒条件, 从而产生真空波长为 400.0 nm 的倍频光?

(6) 计算 (5) 中 e 光波矢 k_e 和传播方向 N_e 之间的夹角 α 。

六、仅考虑单一组分、单原子分子组成的非相对论性气体。

对上述气体, 若忽略分子的大小以及除碰撞瞬间外分子间的相互作用, 则可用理想气体模型描述; 若考虑到分子的实际大小及其间的非碰撞相互作用, 则理想气体模型不再适用。对此, 范德瓦尔斯构建了范德瓦尔斯模型, 该模型下, 1 mol 气体的状态方程 (称为范德瓦尔斯方程) 为

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

其中 T 、 p 和 v 分别表示气体的温度、压强和体积 (即容器容积), R 是理想气体普适常量, a 和 b 是大于零的常量。在稀疏极限 (对于任意给定的 T , $v \rightarrow \infty$) 下, 该模型退化为理想气体模型。

(1) 试直接给出 b 的物理含义 (不必给出分析过程)。设气体分子可视为半径为 r 的刚性小球 (按范德瓦尔斯模型, 小球间有微弱的引力), 试估计 b 的取值。已知阿伏伽德罗常数为 N_A 。

(2) 直接写出 N mol、体积为 V 的范德瓦尔斯气体的状态方程 (表达式中不可出现摩尔体积 v)。

(3) 设气体的定容摩尔热容为 C_V , C_V 满足

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

式中 $\left(\frac{\partial C_V}{\partial v}\right)_T$ 表示当 T 视为常量时 C_V 对 v 的一阶导数, $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$ 表示当 v 视为常量时 p 对 T 的二阶导数, 余类推。

试证明范德瓦尔斯气体的定容摩尔热容 C_V 为常量, 并确定此常量。(此常量的具体形式不必代入后续计算)

(4) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的内能 u 为

$$u = C_V T - \frac{a}{v},$$

试导出其摩尔熵 $s(T, v)$ 的表达式, 其中可含有待定常量。试给出该气体经历准静态绝热过程的方程 (用 T 和 v 表出, 表达式中可含有待定常量)。

(5) 1 mol 范德瓦尔斯气体经历如下可逆卡诺循环过程:

过程 I——等温膨胀: 温度为 T_1 , 体积由 v_1 变为 v_2

过程 II——绝热降温: 温度由 T_1 降为 T_2 , 体积由 v_2 变为 v_3

过程 III——等温压缩: 温度为 T_2 , 体积由 v_3 变为 v_4

过程 IV——绝热升温: 温度由 T_2 升为 T_1 , 体积由 v_4 变为 v_1

试计算该循环过程的吸热量 Q_1 、放热量 Q_2 和循环效率 η (最终将 η 表示为仅依赖于 T_1 和 T_2 的函数)。

(6) 定义等温压缩系数为

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

试推出范德瓦尔斯气体的等温压缩系数 $\kappa_T(T, v)$ 的表达式; 以满足条件 $a \ll pv^2$ 的范德瓦尔斯气体为例, 求 κ_T 的取值范围, 并说明其直观物理意义。

提示: 对于二元函数 $y = y(x_1, x_2)$, 当 x_1 、 x_2 各自独立的微小变化分别为 dx_1 、 dx_2 时, y 的全微分 (y 的微小变化) 为


$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_{x_1} dx_2$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线