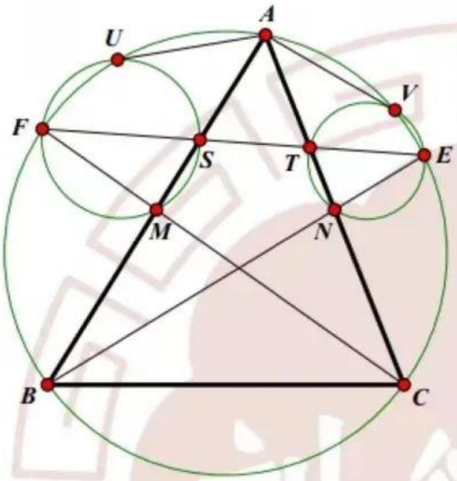
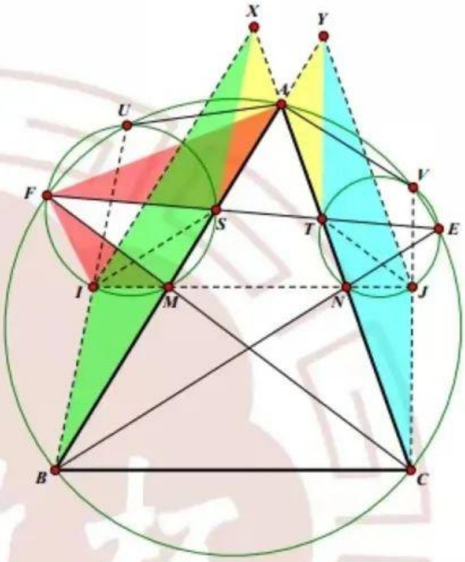
第 4 届刘徽杯第 1 题解答

顾 冬 华

题目 在$\triangle ABC$中，M, N分别是边AB, AC的中点. 直线BN, CM分别再次交$\odot(ABC)$于E, F. 直线EF分别交AB, AC于S, T. $\odot(FSM)$, $\odot(ETN)$分别再次交$\odot(ABC)$于U, V. 证明: $|AU| = |AV|$. 这里$\odot(XYZ)$表示三角形XYZ的外接圆.





证明：设BU再次交⊙（FSM）于I，
则$\angle FMI=\angle FUI=\angle FCB \Rightarrow IM//BC$。
由于M、N分别是AB、AC的中点，
因而I、M、N三点共线。
同时$\angle FSI=\angle FUI=\angle FEB \Rightarrow IS//BE$。（Reim定理）
注意到：$\angle FSA=\angle FIM$且$\angle FMI=\angle FAS$，
因而$\triangle FIM \sim \triangle FSA \Rightarrow \frac{MI}{SA}=\frac{FM}{FA}=\frac{BM}{BC}$。
过I作AB的平行线，交AC于X，
则$\frac{AX}{MI}=\frac{NA}{NM}=\frac{CA}{CB}$。
因而$\frac{AX}{AS}=\frac{CA}{CB}\cdot\frac{BM}{BC}=\frac{AB\cdot AC}{2BC^2}$。
同时$\frac{BS}{IN}=\frac{BM}{MN}=\frac{BA}{BC}=\frac{IX}{IN}\Rightarrow IX=BS$，
因而IBSX为平行四边形。
设CV再次交⊙（ETN）于J，
过J作AC的平行线，交AB于Y，
同理：$\frac{AY}{AT}=\frac{AB\cdot AC}{2BC^2}$，且JCNY为平行四边形。
因而$\triangle AXS \sim \triangle AYT \Rightarrow \angle AXS=\angle AYT$。
因而$\angle IXS=\angle JYT \Rightarrow \angle IBS=\angle JCT$
$\Rightarrow \angle ABU=\angle ACV \Rightarrow AU=AV$。

第 4 届刘徽杯第 2 题解答

杨 晓 鸣

题目 求所有满足 $\sqrt{xy}+\sqrt{uv}$ 为有理数，且

$$\left|\frac{x}{9}-\frac{y}{4}\right|=\left|\frac{u}{3}-\frac{v}{12}\right|=uv-xy$$

的正整数组 (x, y, u, v).

证明 显然，当 $x:y=9:4$，$u:v=1:4$ 时，xy, uv 都是完全平方数，再由 $uv-xy=0$ 知，正整数组

$$(x, y, u, v)=(9k, 4k, 3k, 12k),\ k\in\mathbb{Z}^{+}$$

满足条件.

下面证明：当 $uv-xy>0$ 时，则 $\sqrt{xy}+\sqrt{uv}$ 必不为有理数.

假设 $\sqrt{xy}+\sqrt{uv}$ 为有理数，设 $\sqrt{xy}+\sqrt{uv}=r\in\mathbb{Q}, r>0$，则 $xy=r^2-2r\sqrt{uv}+uv$，故 $\sqrt{uv}=\dfrac{r^2+uv-xy}{2r}$ 为有理数，于是 uv 必为完全平方数，同理 xy 必为完全平方数，因此，$36uv$, $36xy$ 均为完全平方数.

由 $\left|\frac{x}{9}-\frac{y}{4}\right|=\left|\frac{u}{3}-\frac{v}{12}\right|=uv-xy$ 得

$$|4x-9y|=|12u-3v|=36uv-36xy.$$

令

$$36xy=4x\cdot 9y=a^2,\ 36uv=12u\cdot 3v=c^2,\ (a, c\in\mathbb{N}^{*})$$

$$b=\frac{4x+9y}{2},\ d=\frac{12u+3v}{2},\ S=\frac{|4x-9y|}{2}=\frac{|12u-3v|}{2},$$

可知 b, $d\in\mathbb{N}^{*}$.

显然

$$b^2-a^2=\left(\frac{4x+9y}{2}\right)^2-36xy=S^2.$$

同理，$d^2-c^2=S^2$，即 $S^2=b^2-a^2=d^2-c^2$.

又 $2S=c^2-a^2=d^2-b^2$.

由于 d^2-b^2 为偶数 $\Rightarrow d$, b 同奇偶，即 $b\le d-2$

$$\Rightarrow 2S\ge d^2-(d-2)^2\Rightarrow d<\frac{S}{2}+1.$$

另一方面，$d^2=c^2+S^2>S^2$，即

$$S^2<d^2<(\frac{S}{2}+1)^2\Rightarrow 3S^2<4S+4\Rightarrow S\le 2 \text{ 即 } S=1,\ 2.$$

当 $S=1$ 时，若 $b^2-a^2=1\Rightarrow(b-a)(b+a)=1$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}b-a=-1\\b+a=-1\end{cases},$$

矛盾!

当 $S=2$ 时，$S^2=4$，若 $(b-a)(b+a)=4=1\times 4$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}b-a=-1\\b+a=-4\end{cases}\Rightarrow\text{无正整数解.}$$

所以，当 $uv-xy>0$ 时，uv, xy 不可能都是完全平方数.

所以，满足条件的所有正整数组为

$$(x, y, u, v)=(9k, 4k, 3k, 12k),\ k\in\mathbb{Z}^{+}.$$

第 3 题 对于正整数 n, 记 $f(n)$ 为满足以下条件的整数序列 $\{a_i\}_{i=1}^{l}$ 的最大项数:

- $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_l \le n$.
- 当 $1 \le i \le j \le k \le l$, $1 \le i' \le j' \le k' \le l$, 且 $(i,j,k) \ne (i',j',k')$ 时 $a_i + a_j + a_k \ne a_{i'} + a_{j'} + a_{k'}$.

证明:

$$f(n) \le \left\lfloor 4n\left(1 - \frac{1}{6\log_2^2 n}\right)\right\rfloor^{1/3} + 7,$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.